2.2.30 Racionální čísla

Předpoklady: 020229

Pedagogická poznámka: V hodině je třeba postupovat tak, aby se s příkladem 6 začalo nejpozději 15 minut před koncem.

Čísla, která zatím známe:

- přirozená (počty věcí, lidí, ...),
- celá (počty, dluhy, ...) - k přirozeným číslům jsme přidali nulu (nic) a záporná čísla (méně než nula, dluh).

Zlomky jsou novým typem čísel. Umožňují nám zapsat nejen všechna celá čísla (jako jedniny), ale jejich i libovolně malé části (zlomky s jmenovatelem různým od jedničky) $\Rightarrow$ k tomu, co už známe, jsme opět přidali něco nového a získali jsme novou množinu čísel **čísla racionální**.

Racionální čísla můžeme zapsat zlomkem jako podíl celého čísla a přirozeného čísla. Značíme je *Q*.

Př. 1: Vynásob $0,2 \cdot 0,3$ jako desetinná čísla i jako zlomky. Proč při násobení desetinných čísel sčítáme desetinná místa?

$0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

$\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{100}$

Desetinná místa udávají jmenovatel v desetinném zlomku. Při násobení zlomků se násobí i jmenovatelé a tím se "posčítají" nuly ve jmenovateli.

Pedagogická poznámka: Mnoho žáků zapomene, že se desetinná místa při násobení sčítají, získají tak dvojici výsledků: $0,2 \cdot 0,3 = 0,6$, $\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{100} = 0,06$. Je třeba, aby si uvědomili, že tento stav není možný, že oběma způsoby musí dojít ke stejnému výsledku a v jednom z postupů musí být chyba.

Dodatek: Některé další argumenty pro sčítání desetinných míst při násobení:
$0,2\ \mathrm{m} \cdot 0,3\ \mathrm{m} = 2\ \mathrm{dm} \cdot 3\ \mathrm{dm} = 6\ \mathrm{dm}^2 = 0,06\ \mathrm{m}^2$,
$0,2 \cdot 0,3 = 0,06$ - násobíme dvě čísla menší než jedna $\Rightarrow$ výsledek musí být menší než menší z násobených čísel,
$0,2 \cdot 0,3 = \frac{1}{5} \cdot 0,3$ - výsledkem je pětina z 0,3: $0,3 : 5 = 0,06$.

Př. 2: Vypočti. Hledej různé způsoby řešení. Výsledek udej ve formě zlomku v základním tvaru i desetinného čísla. Porovnej s postupem na dělení desetinných čísel.

a) $\frac{1,2}{1,44}$ b) $\frac{0,3}{0,18}$ c) $\frac{0,09}{0,027}$

a) $\frac{1,2}{1,44}=\frac{\frac{12}{10}}{\frac{144}{100}}=\frac{12}{10}\cdot\frac{100}{144}=\frac{4\cdot 3\cdot 10}{4\cdot 36}=\frac{3\cdot 10}{3\cdot 12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}=0,8\overline{3}$.

Jinak: $\frac{1,2}{1,44}=\frac{120}{144}=\frac{4\cdot 30}{4\cdot 36}=\frac{3\cdot 10}{3\cdot 12}=\frac{5}{6}=0,8\overline{3}$.

b) $\frac{0,3}{0,18}=\frac{30}{18}=\frac{3\cdot 10}{3\cdot 6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}=1,\overline{6}$

c) $\frac{0,09}{0,027}=\frac{90}{27}=\frac{10}{3}=3,\overline{3}$

Při dělení desetinných čísel jsme nejdříve vynásobili obě čísla tak, abychom dělili přirozeným číslem $\Rightarrow$ ve skutečnosti jsme rozšiřovali zlomek.

Pedagogická poznámka: Objevuje se početnější skupina žáků, kteří s příkladem neví rady. Proto nečekáme u bodu a) příliš dlouho a po chvíli nechám na tabuli žáky napsat obě řešení uvedená u bodu a) (složený zlomek je častější, ale rozšíření se určitě také objeví). Poté je zbytek příkladu bez problémů.
Při kontrole příkladu je třeba dát pozor na krácení zlomků. Žáci se při posledním průchodu většinově snažili rozkládat čísla do prvočíselných rozkladů, ve kterých kvůli složitosti často udělají chybu. Kvůli tomuto příklady byly udělány změny v předchozích hodinách, takže je možné, že se tento problém už neobjeví v takové míře.

Př. 3: V loňském roce jsme při probírání desetinných čísel zjistili, že násobení desetinou funguje stejně jako dělení deseti, násobení setinou stejně jako dělení stem, ... Vysvětli pomocí zlomků.

Například: $5\cdot 0,1=5\cdot\frac{1}{10}=\frac{5}{10}=5:10$.

Násobení desetinnou je vlastně násobení zlomkem $\frac{1}{10}$, což je dělení deseti.

Př. 4: V loňském roce jsme při probírání desetinných čísel zjistili, že dělení desetinou funguje stejně jako násobení deseti, dělení setinou stejně jako násobení stem, ... Vysvětli pomocí zlomků.

Například: $5:0,1=5:\frac{1}{10}=5\cdot\frac{10}{1}=5\cdot 10$.

Dělení desetinnou je vlastně dělení zlomkem $\frac{1}{10}$, které převádíme na násobení zlomkem $\frac{10}{1}$ což je násobení deseti.

Př. 5: Podobná pravidla je možné najít i pro čísla, která nejsou postavená na desítkách. Kupříkladu násobit číslem 0,5 je stejné jako ....
Doplň pravidlo a zdůvodni ho.

Například: $5\cdot 0,5=5\cdot\frac{5}{10}=5\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=5:2$.

0,5 můžeme napsat jako $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

Př. 6: Doplň tabulku.

násobit číslem	0,1	0,5	0,2	0,01	0,25	0,04
je jako dělit číslem						

násobit číslem	0,1	0,5	0,2	0,01	0,25	0,04
je jako dělit číslem	10	2	5	100	4	25

$$x\cdot 0,2=x\cdot\frac{2}{10}=x\cdot\frac{1}{5}=\frac{x}{5}=x:5$$

$$x\cdot 0,01=x\cdot\frac{1}{100}=\frac{x}{100}=x:100$$

$$x\cdot 0,25=x\cdot\frac{25}{100}=x\cdot\frac{1}{4}=\frac{x}{4}=x:4$$

$$x\cdot 0,04=x\cdot\frac{4}{100}=x\cdot\frac{1}{25}=\frac{x}{25}=x:25$$

Pedagogická poznámka: Rozhodně ne všichni žáci si příklad počítají, jak je uvedeno v řešení. Někteří přijdou na to, že čísla, která k sobě patří dávají po vynásobení jedničku, jiní vyplňují tabulku pouze „citem“. Nebráním tomu, pokud mají řešení správně.

Př. 7: Doplň tabulku.

dělit číslem	0,1	0,5	0,2	0,01	0,25	0,04
je jako násobit číslem						

dělit číslem	0,1	0,5	0,2	0,01	0,25	0,04
je jako násobit číslem	10	2	5	100	4	25

$$x:0,1=x:\frac{1}{10}=x\cdot\frac{10}{1}=x\cdot 10$$

$$x:0,5=x:\frac{5}{10}=x:\frac{1}{2}=x\cdot\frac{2}{1}=x\cdot 2$$

$x:0,2 = x:\frac{2}{10} = x:\frac{1}{5} = x\cdot\frac{5}{1} = x\cdot 5$

$x:0,01 = x:\frac{1}{100} = x\cdot\frac{100}{1} = x\cdot 100$

$x:0,25 = x:\frac{25}{100} = x:\frac{1}{4} = x\cdot\frac{4}{1} = x\cdot 4$

$x:0,04 = x:\frac{4}{100} = x:\frac{1}{25} = x\cdot\frac{25}{1} = x\cdot 25$

Př. 8: Dokud jsme počítali pouze s přirozenými čísly, platilo, že při násobení se čísla zvětšují, při dělení se čísla zmenšují (s výjimkou 1, která čísla neměnila). Pro jaká kladná racionální čísla platí tato pravidlo i nyní? Kdy se číslo násobením zmenšuje a naopak dělením zvětšuje?

Hodnotu zvětšuje násobení racionálními čísly většími než 1 (sem patří i všechna přirozená čísla větší než 1).
Násobení racionálními čísly menšími než 1 hodnotu zmenšuje.

Shrnutí: Násobení racionálními čísly menšími než 1 zmenšuje hodnotu.